



TITLE:

Rankin - Selberg convolution (I)

AUTHOR(S):

渡部, 隆夫

CITATION:

渡部, 隆夫. Rankin - Selberg convolution (I). 数理解析研究所講究録
1992, 792: 134-143

ISSUE DATE:

1992-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82703>

RIGHT:

Rankin - Selberg convolution (I)

渡部 隆夫 (東北大 教養)

Rankin - Selberg convolution の典型的な例として, H. Jacquet と J. Shalika による $GL_n \times GL_n$ の保型 L 関数の積分表示に関する論文 [Jacquet - Shalika] の要約を述べる. Rankin - Selberg convolution についての概括的な解説については [Bump] を参照して下さい.

Notation

F を代数体とし, \mathbf{A} をそのアデール環とする. F の素点全体の集合を \mathfrak{P} とし, その中の無限素点のなす部分集合を \mathfrak{P}_∞ , 有限素点のなす部分集合を \mathfrak{P}_f とかく. 各 $v \in \mathfrak{P}$ に対し, F_v を F の v による完備化とする. $v \in \mathfrak{P}_f$ のとき, \mathcal{O}_v を F_v の付値環, ϖ_v を素元, q_v を剰余類体の元の数とする. 次のように記号を定める.

$$G = GL_n(F)$$

$$Z = \text{the center of } G$$

$$T = \text{the group of diagonal matrices}$$

$$U = \text{the group of upper triangular matrices with ones in the diagonal}$$

$$B = \text{the group of upper triangular matrices} = TU$$

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} A & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in GL_{n-1}(F), x \in F^{n-1} \right\}$$

$$Q = ZP \text{ (a maximal parabolic subgroup of } G)$$

上で与えられた G の部分群の 1 つを H とするとき

$$H_v = \text{the group of } F_v \text{ rational points of } H \quad (v \in \mathfrak{P})$$

$$H_f = \prod_{v \in \mathfrak{P}_f} H_v \text{ (制限直積)} \quad H_\infty = \prod_{v \in \mathfrak{P}_\infty} H_v$$

$$H_{\mathbf{A}} = H_\infty H_f$$

とおく. また

$$K_v = \text{the standard maximal compact subgroup of } G_v \quad (v \in \mathfrak{P})$$

$$K_{\mathbf{A}} = \prod_{v \in \mathfrak{P}} K_v$$

$$\mathcal{H}_v = \text{the local Hecke algebra of } G \quad (v \in \mathfrak{P})$$

$$\mathcal{H}_{\mathbf{A}} = \bigotimes_{v \in \mathfrak{P}} \mathcal{H}_v \text{ (制限テンソル積)} = \text{the global Hecke algebra of } G$$

とする.

1. $G_{\mathbf{A}}$ の cuspidal 表現

$Z \backslash Z_{\mathbf{A}}$ の character $\omega: Z \backslash Z_{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{C}^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ を 1 つ固定する. $G_{\mathbf{A}}$ 上の関数 $f: G_{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{C}$ で次の 4 つの条件 (i) ~ (iv) をみたすものからなる空間を $L_0^2(G \backslash G_{\mathbf{A}}, \omega)$ とかく.

- (i) $f(\gamma g) = f(g) \quad (\gamma \in G, g \in G_{\mathbf{A}})$
- (ii) $f(zg) = \omega(z)f(g) \quad (z \in Z_{\mathbf{A}}, g \in G_{\mathbf{A}})$
- (iii) $\int_{Z_{\mathbf{A}} G \backslash G_{\mathbf{A}}} |f(g)|^2 dg < \infty$
- (iv) 任意の parabolic subgroup $R \subsetneq G$ に対して, その unipotent radical を N とするとき

$$\int_{N \backslash N_{\mathbf{A}}} f/ng) dn = 0 \quad (\text{for almost everywhere } g \in G_{\mathbf{A}})$$

$G_{\mathbf{A}}$ は右移動により $L_0^2(G \backslash G_{\mathbf{A}}, \omega)$ の上に作用する. この表現は既約分解でき

$$L_0^2(G \backslash G_{\mathbf{A}}, \omega) = \oplus \pi$$

とかける. ここで各既約表現 π は重複度 1 をもつ (multiplicity one theorem [Shalika]). この直和に現われる $G_{\mathbf{A}}$ の既約ユニタリ表現を (central character ω をもつ) cuspidal 表現とよぶ. さらに π に含まれる関数 $f: G_{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{C}$ で次の 2 つの条件 (v), (vi) をみたすものからなる集合を π^∞ とかくことにする.

(v) $f(g) = f(g_\infty \cdot g_f)$ は $g_\infty \in G_\infty$ について C^∞ かつ $g_f \in G_f$ について locally constant である.

(vi) f は right $K_{\mathbf{A}}$ -finite, i.e. $K_{\mathbf{A}}$ の元による f の右移動で得られた関数のなるベクトル空間は有限次元である.

空間 π^∞ は既約 admissible $\mathcal{H}_{\mathbf{A}}$ -module になる.

さて cuspidal 表現 π を固定したとき, π^∞ は \mathcal{H}_v ($v \in \mathfrak{P}$) の既約 admissible 表現 π_v ($v \in \mathfrak{P}$) の制限テンソル積に分解される [Flath]:

$$(1.1) \quad \pi^\infty = \bigotimes_{v \in \mathfrak{P}} \pi_v \quad (\text{制限テンソル積})$$

ここで, ほとんどすべての v について π_v は class 1 表現 (i.e. π_v は K_v -不変ベクトルをもつ) である. すなわち \mathfrak{P} の有限部分集合 S_π ($\mathfrak{P}_\infty \subset S_\pi$) で

$$v \notin S_\pi \implies \pi_v \text{ は class 1 表現}$$

となるものが取れる. 任意の class 1 表現は不分岐主系列表現の商表現として得られるから, 各 π_v ($v \notin S_\pi$) に対して, 不分岐指標 $\mu_{i,v}: F_v^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ ($1 \leq i \leq n$) を適当にとれば, π_v は誘導表現

$$\text{Ind}_{B_v}^{G_v} \mu = \{ \phi: G_v \rightarrow \mathbf{C} \mid \phi(tng) = \delta^{1/2}(t) \mu(t) \phi(g), \quad t \in T_v, u \in U_v, g \in G_v \}$$

ただし

$$\mu(t) = \mu_{1,v}(t_1) \cdots \mu_{n,v}(t_n), \quad \delta(t) = \prod_{j=1}^n |t_j|_v^{n-2j+1} \quad (t = \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix})$$

の既約商表現と同型になる．そこで

$$A(\pi_v) = \begin{pmatrix} \mu_{1,v}(\varpi_v) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_{n,v}(\varpi_v) \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C})$$

と対角行列を定義すれば，これは共役を除いて π_v により一意的に定まる．

次に π の Whittaker model について述べる．Non-trivial character

$$\psi = \prod_{v \in \mathfrak{P}} \psi_v: F \backslash \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{C}^1, \quad \psi_v|_{\mathcal{O}_v} = 1 \text{ for any } v \in \mathfrak{P}_f$$

をとり，これにより $U_{\mathbf{A}}$ の character を

$$\theta: U_{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbb{C}^1, \quad \begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & * & * & * \\ 0 & 1 & u_{2,3} & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & u_{n,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \psi(u_{1,2} + u_{2,3} + \cdots + u_{n,n-1})$$

で定義する．このとき $\varphi \in \pi^\infty$ に対して

$$W_\varphi(g) = \int_{U \backslash U_{\mathbf{A}}} \overline{\theta(u)} \varphi(ug) du$$

とおく．更に

$$W(\pi; \psi) = \{W_\varphi \mid \varphi \in \pi^\infty\}$$

とおき，これを π の global Whittaker model とよぶ．対応 $\varphi \mapsto W_\varphi$ は $\mathcal{H}_{\mathbf{A}}$ の作用と可換であり， π^∞ と $W(\pi; \psi)$ は admissible $\mathcal{H}_{\mathbf{A}}$ -module として同型である．また逆対応は次で与えられる [Shalika]:

$$(1.2) \quad \varphi(g) = \sum_{\gamma \in U \backslash P} W_\varphi(\gamma g) \quad (\varphi \in \pi^\infty)$$

分解 (1.1) に対応して $W(\pi; \psi)$ は π_v の local Whittaker model $W(\pi_v; \psi_v)$ の制限テンソル積に分解される:

$$W(\pi; \psi) = \bigotimes_{v \in \mathfrak{P}} W(\pi_v; \psi_v) \quad (\text{制限テンソル積})$$

これにより, 各 $W \in W(\pi; \psi)$ は

$$(1.3) \quad W(g) = \prod_{v \in \mathfrak{P}} W_v \quad (W_v \in W(\pi_v; \psi_v))$$

とかける. いま

$$K_\pi = \prod_{v \in S_\pi} K_v$$

$$W(\pi; \psi)^{K_\pi} = \{W \in W(\pi; \psi) \mid W(gk) = W(g), \quad g \in G_{\mathbf{A}}, \quad k \in K_\pi\}$$

とおけば, $W \in W(\pi; \psi)^{K_\pi}$ に対して, (1.3) の積に現われる W_v ($v \notin S_\pi$) は class 1 Whittaker function である. ここで Shintani の explicit formula を記述しておく. $v \notin S_\pi$ を固定し, 次のように記号を定める.

$$p_\ell = \begin{pmatrix} \varpi_v^{\ell_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varpi_v^{\ell_n} \end{pmatrix} \quad (\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbf{Z}^n)$$

$$\rho_\ell = GL_n(\mathbf{C}) \text{ の有限次元表現 : dominant weight } \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \mapsto a_1^{\ell_1} a_2^{\ell_2} \cdots a_n^{\ell_n}$$

ただし ρ_ℓ は $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \cdots \geq \ell_n$ のときに定義される. このとき $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbf{Z}$ に対し

$$(1.4) \quad W_v(p_\ell) = \begin{cases} \delta^{1/2}(p_\ell) \text{tr}(\rho_\ell(A(\pi_v))) & (\ell_1 \geq \cdots \geq \ell_n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である.

2 Zeta integral

以下では次のデータを固定する.

$$\begin{aligned}\pi &= \otimes_v \pi_v = \text{central character } \omega \text{ をもつ既約 cuspidal 表現,} & A_v &= A(\pi_v) \quad (v \notin S_\pi) \\ \pi' &= \otimes_v \pi'_v = \text{central character } \omega' \text{ をもつ既約 cuspidal 表現,} & A'_v &= A(\pi'_v) \quad (v \notin S_{\pi'}) \\ S &= S_\pi \cup S_{\pi'}\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}\alpha: G_{\mathbf{A}} &\rightarrow \mathbf{C}^*, \quad \alpha(g) = |\det g| & \delta_Q: Q_{\mathbf{A}} &\rightarrow \mathbf{C}^*, \quad \delta_Q(zq) = \alpha(q) \quad (q \in P_{\mathbf{A}}, \quad z \in Z_{\mathbf{A}}) \\ \eta: Z_{\mathbf{A}} &\rightarrow \mathbf{C}^1, \quad \eta(z) = \overline{\omega(z)}\omega'(z) & \tilde{\eta}: Q_{\mathbf{A}} &\xrightarrow{\text{proj.}} P_{\mathbf{A}} \backslash Q_{\mathbf{A}} \cong Z_{\mathbf{A}} \xrightarrow{\eta} \mathbf{C}^1\end{aligned}$$

とおく. G はベクトル空間 F^n に右から作用するものとし, $\epsilon = (0, \dots, 0, 1) \in F^n$ とする. このとき ϵ の G での stabilizer は P になる.

さて \mathbf{A}^n 上の Schwarz - Bruhat 関数 Φ で次をみたすものを 1 つとる.

$$(2.1) \quad \Phi = \prod_{v \in \mathfrak{P}} \Phi_v, \quad v \notin S \implies \Phi_v \text{ は } \mathcal{O}_v^n \text{ の特性関数}$$

これに対して

$$(2.2) \quad f(g, s, \eta) = \int_{Z_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon \cdot zg) \alpha(zg)^s \eta(z) dz \quad (g \in G_{\mathbf{A}}, \quad s \in \mathbf{C})$$

とすれば, 積分は $\Re(s) > 1/n$ で絶対収束し $\text{Ind}_{Q_{\mathbf{A}}}^{G_{\mathbf{A}}} \tilde{\eta}^{-1} \delta_Q^{s-1/2}$ の元をあたえる. これから Eisenstein 級数を

$$(2.3) \quad E(g, \Phi, s, \eta) = \sum_{\gamma \in Q \backslash G} f(\gamma g, s, \eta)$$

で定義すれば, 右辺の級数は $\Re(s) > 1$ で絶対収束し, さらに一般論から $E(g, \Phi, s, \eta)$ は全 s -平面上有理型関数に解析接続される. いま $\varphi \in \pi^\infty$, $\varphi' \in \pi'^\infty$ に対して

$$I(s, \Phi, \varphi', \varphi) = \int_{Z_{\mathbf{A}} G \backslash G_{\mathbf{A}}} E(g, \Phi, s, \eta) \varphi'(g) \overline{\varphi(g)} dg$$

とおく. 被積分関数 $E(g, \Phi, s, \eta) \varphi'(g) \overline{\varphi(g)}$ は g について急減少になるから, 積分は絶対収束する. 従って $I(s, \Phi, \varphi', \varphi)$ は s について有理型関数をあたえる.

3 Basic identity

$I(s, \Phi, \varphi', \varphi)$ について形式的な変形をおこなう.

$$\begin{aligned}
I(s, \Phi, \varphi', \varphi) &= \int_{Z_{\mathbf{A}} G \backslash G_{\mathbf{A}}} \sum_{\gamma \in Q \backslash G} f(\gamma g, s, \eta) \varphi'(\gamma g) \overline{\varphi(\gamma g)} dg \quad ((2.3)) \\
&= \int_{Z_{\mathbf{A}} Q \backslash G_{\mathbf{A}}} f(g, s, \eta) \varphi'(g) \overline{\varphi(g)} dg \\
&= \int_{Z_{\mathbf{A}} P \backslash G_{\mathbf{A}}} \left\{ \int_{Z_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon \cdot ag) \alpha(ag)^s \eta(a) da \right\} \varphi'(g) \overline{\varphi(g)} dg \quad ((2.2)) \\
&= \int_{Z_{\mathbf{A}} P \backslash G_{\mathbf{A}}} \int_{Z_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon \cdot ag) \alpha(ag)^s \varphi'(ag) \overline{\varphi(ag)} dadg \\
&= \int_{P \backslash G_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon \cdot g) \alpha(g)^s \varphi'(g) \overline{\varphi(g)} dg \\
&= \int_{P \backslash G_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon \cdot g) \alpha(g)^s \varphi'(g) \left\{ \sum_{\xi \in U \backslash P} \overline{W_{\varphi}(\xi g)} \right\} dg \quad ((1.2)) \\
&= \int_{P \backslash G_{\mathbf{A}}} \sum_{\xi \in U \backslash P} \Phi(\epsilon \cdot \xi g) \alpha(\xi g)^s \varphi'(\xi g) \overline{W_{\varphi}(\xi g)} dg \\
&= \int_{U \backslash G_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon \cdot g) \alpha(g)^s \varphi'(g) \overline{W_{\varphi}(g)} dg \\
&= \int_{U_{\mathbf{A}} \backslash G_{\mathbf{A}}} \int_{U \backslash U_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon \cdot ug) \alpha(ug)^s \varphi'(ug) \overline{W_{\varphi}(ug)} dudg \\
&= \int_{U_{\mathbf{A}} \backslash G_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon \cdot g) \alpha(g)^s \left\{ \int_{U \backslash U_{\mathbf{A}}} \overline{\theta(u)} \varphi'(ug) du \right\} \overline{W_{\varphi}(g)} dg \\
&= \int_{U_{\mathbf{A}} \backslash G_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon \cdot g) \alpha(g)^s W_{\varphi'}(g) \overline{W_{\varphi}(g)} dg
\end{aligned}$$

ここで積分

$$\Psi(s, \Phi, W_{\varphi'}, W_{\varphi}) = \int_{U_{\mathbf{A}} \backslash G_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon \cdot g) \alpha(g)^s W_{\varphi'}(g) \overline{W_{\varphi}(g)} dg$$

は $\Re(s) \gg 0$ で絶対収束する. 結果として等式

$$(3.1) \quad I(s, \Phi, \varphi', \varphi) = \Psi(s, \Phi, W_{\varphi'}, W_{\varphi}) \quad (\Re(s) \gg 0)$$

をもつ. (1.3), (2.1) より右辺は Euler 積をもつ:

$$(3.2) \quad \Psi(s, \Phi, W_{\varphi'}, W_{\varphi}) = \prod_{v \in \mathfrak{P}} \Psi(s, \Phi_v, W'_v, W_v)$$

$$(3.3) \quad \Psi(s, \Phi_v, W'_v, W_v) = \int_{U_v \backslash G_v} \Phi_v(\epsilon \cdot g) \alpha_v(g)^s W'_v(g) \overline{W_v(g)} dg$$

各 local integral は $\Re(s) \gg 0$ で絶対収束する. より詳しく次が証明される ([Jacquet - Shalika: Proposition (1.5) and (3.17)]).

(3.4) 各 $v \in \mathfrak{P}$ に対して, 積分 (3.3) は $\Re(s) \geq 1$ で絶対収束する.

4 Euler factor の計算 (不分岐有限素点の場合)

$\varphi \in \pi^\infty, \varphi' \in \pi'^\infty$ を

$$W_\varphi = \prod_{v \in \mathfrak{P}} W_v \in W(\pi; \psi)^{K_\pi}, \quad W_{\varphi'} = \prod_{v \in \mathfrak{P}} W'_v \in W(\pi'; \psi)^{K_{\pi'}}$$

をみたすようにとる. このとき (2.1) より

$$v \notin S \implies W_v, W'_v, \Phi_v \text{ はすべて } K_v\text{-不変}$$

である. いま $v \in \mathfrak{P}, v \notin S$ を 1 つ固定し, これについて積分 (3.3) を計算する. $\Re(s) >> 0$ とする. Iwasawa 分解 $G_v = N_v T_v K_v$ より

$$\begin{aligned} & \Psi(s, \Phi_v, W'_v, W_v) \\ &= \int_{T_v/T_v \cap K_v} \Phi_v(\epsilon \cdot t) \alpha_v(t)^s W'_v(t) \overline{W_v(t)} \delta^{-1}(t) dt \\ &= \sum_{\ell=(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbf{Z}^n} \Phi_v(\epsilon \cdot p_\ell) \alpha_v(p_\ell)^s W'_v(p_\ell) \overline{W_v(p_\ell)} \delta^{-1}(p_\ell), \quad p_\ell = \begin{pmatrix} \varpi_v^{\ell_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varpi_v^{\ell_n} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\substack{\ell=(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbf{Z}^n \\ \ell_n \geq 0}} \alpha_v(p_\ell)^s W'_v(p_\ell) \overline{W_v(p_\ell)} \delta^{-1}(p_\ell) \end{aligned}$$

ここで explicit formula (1.4) を使う.

$$L^+ = \{\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbf{Z}^n : \ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_n \geq 0\}$$

とすると

$$\begin{aligned} & \Psi(s, \Phi_v, W'_v, W_v) \\ &= \sum_{\ell \in L^+} \alpha_v(p_\ell)^s W'_v(p_\ell) \overline{W_v(p_\ell)} \delta^{-1}(p_\ell) \\ &= \sum_{\ell \in L^+} q_v^{-s(\ell_1 + \dots + \ell_n)} \text{tr}(\rho_\ell(A'_v)) \text{tr}(\rho_\ell(\overline{A_v})) \\ &= \sum_{\ell \in L^+} \text{tr}(\rho_\ell(A'_v) \otimes \rho_\ell(\overline{A_v})) q_v^{-s d(\ell)}, \quad d(\ell) = \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{\ell \in L^+ \\ d(\ell)=j}} \text{tr}(\rho_\ell(A'_v) \otimes \rho_\ell(\overline{A_v})) \right\} q_v^{-sj} \end{aligned}$$

ここで, (ρ, V) を $GL_n(\mathbf{C})$ の standard 表現とすると

$$(4.1) \quad \text{Sym}^j(\rho \otimes \rho) \cong \bigoplus_{\substack{\ell \in L \\ d(\ell)=j}} \rho_\ell \otimes \rho_\ell$$

これから

$$(4.2) \quad \Psi(s, \Phi_v, W'_v, W_v) = \sum_{j=0}^{\infty} \text{tr}(\text{Sym}^j(A'_v \otimes \overline{A_v})) q_v^{-sj} = \det(1 - A'_v \otimes \overline{A_v} q_v^{-s})^{-1}$$

をえる. (3.4) よりこれは $\Re(s) \geq 1$ でなりたつ.

(4.2) で特に $\pi = \pi', W = W'$ とすれば

$$\det(1 - A_v \otimes \overline{A_v} q_v^{-s}) \Psi(s, \Phi_v, W_v, W_v) = 1 \quad (\Re(s) \geq 1)$$

従って

$$\det(1 - A_v \otimes \overline{A_v} q_v^{-s}) \neq 0 \quad (\Re(s) \geq 1)$$

ゆえに λ を A_v の固有値とすれば

$$1 - q_v^{-\sigma} |\lambda|^2 \neq 0 \quad (\sigma \geq 1)$$

これから

$$(4.3) \quad \lambda \text{ が } A_v \text{ の固有値} \implies |\lambda| < q_v^{1/2} \quad (v \notin S)$$

である ([Jacquet - Shalika: Corollary (2.5)]). この評価から Euler product

$$(4.4) \quad L_S(s, \pi \times \pi') = \prod_{v \notin S} \det(1 - \overline{A_v} \otimes A'_v q_v^{-s})^{-1}$$

は $\Re(s) \gg 0$ で絶対収束する. (3.1), (3.2), (4.2) より

$$(4.5) \quad I(s, \Phi, \varphi', \varphi) = \Psi_S(s, \Phi, W', W) L_S(s, \pi \times \pi') \quad (\Re(s) \gg 0)$$

ただし

$$\Psi_S(s, \Phi, W', W) = \prod_{v \in S} \Psi(s, \Phi_v, W'_v, W_v)$$

となる. (3.4) より $\Psi_S(s, \Phi, W', W)$ は $\Re(s) > 1$ で正則で, Φ, φ, φ' をうまくとることにより 0 にならないようにできる ([Jacquet - Shalika: Proposition (1.5) and (3.17)]). したがって (4.5) から

$$(4.6) \quad L_S(s, \pi \times \pi') \text{ は } \Re(s) > 1 \text{ 上正則に解析接続できる}$$

ことがわかる ([Jacquet - Shalika: Lemma (5.2)]). (4.3), (4.6) を用いて,

$$(4.7) \quad \text{無限積 } \prod_{v \notin S} \det(1 - \overline{A_v} \otimes A'_v q_v^{-s})^{-1} \text{ は } \Re(s) > 1 \text{ で絶対収束する}$$

が証明できる ([Jacquet - Shalika: Theorem (5.3)]). とくに $L_S(s, \pi \times \pi') \neq 0$ ($\Re(s) > 1$) である. また (4.5) は $\Psi_S(s, \Phi, W', W)$ が全 s -平面に解析接続できれば, $L_S(s, \pi \times \pi')$ も全 s -平面に解析接続できることを示す. これは [Jacquet - Piatetski-Shapiro - Shalika: Theorem (2.7)] (non-archimedean case) と [Jacquet - Shalika 2: Theorem 5.1] (archimedean case) で成し遂げられた.

REFERENCES

- [C] "Automorphic Forms, Representations, and L -functions," Proc. Symp. in Pure Math. Vol. XXXIII - Part 1, A.M.S., 1979.
- [Bump] D. Bump, *The Rankin-Selberg method: A survey*, in "Number Theory, Trace Formulas and Discrete Groups," Academic Press, 1989.
- [Flath] D. Flath, *Decomposition of representations into tensor products*, in "[C]," pp. 179 - 183.
- [Jacquet - Shalika] H. Jacquet and J. Shalika, *On Euler products and the classification of automorphic representations I*, Amer. J. Math. **103** (1981), 499 - 588.
- [Jacquet - Shalika 2] H. Jacquet and J. Shalika, *Rankin-Selberg convolutions: Archimedean theory*, Israel Math. Conf. Proc. **2** (1990), 125 - 207.
- [Jacquet - Piatetski-Shapiro - Shalika] H. Jacquet, I. I. Piatetski-Shapiro and J. Shalika, *Rankin-Selberg convolution*, Amer. J. Math. **105** (1983), 367 - 464.
- [Shalika] J. Shalika, *The multiplicity one theorem on $GL(n)$* , Ann. Math. **100** (1974), 171 - 193.